Prof. Darcy Chaves Silveira
Prof.ª Maria Sueli Gomes Saldanha
Prof.ª Laura de O. Ramalho Misiti

ARITMÉTICA

e Introdução à Álgebra

1.463 PROBLEMAS RESOLVIDOS E EXPLICADOS

Ensino Fundamental,
Ensino Médio
Vestibular e
Concursos

1ª edição
São Paulo
2012

Ícone editora

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Silveira, Darcy Chaves
Aritmética e introdução à Álgebra: 1.463 problemas resolvidos e explicados: ensino fundamental, ensino médio, vestibular e concursos / Darcy Chaves Silveira, Maria Sueli Gomes Saldanha, Laura de O. Ramalho Misiti. – 1ª ed. – São Paulo: Ícone, 2012.

ISBN 978-85-274-1198-1

1. Matemática (Ensino Fundamental). 2. Matemática (Ensino Médio). 3. Matemática (Vestibular). 4. Matemática (Concursos). I. Saldanha, Maria Sueli Gomes. II. Misiti, Laura de O. Ramalho. III. Título.

CDD-378.1664
12-00796 -372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática para vestibulares. 378.1664
2. Matemática: Ensino Fundamental. 372.7

Arte da capa
Isabella Cascaldi Neirouz

Design gráfico e diagramação
Richard Veiga

Revisão técnica
Darcy Chaves Silveira
Maria Sueli Gomes Saldanha
Laura de O. Ramalho Misiti

ÍCONE EDITORA LTDA.
Rua Anhanguera, 56 – Barra Funda
CEP 01135-000 – São Paulo – SP
Tels./Fax.: (011) 3392-7771
www.iconeeditora.com.br
iconevendas@iconeeditora.com.br

APRESENTAÇÃO

O livro que ora lançamos no mercado editorial, com o nome de *ARITMÉTICA – 1.463 PROBLEMAS RESOLVIDOS E EXPLICADOS*, é o primeiro de uma coleção de quatro livros: Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria, todos com as mesmas características didáticas, ou seja, com problemas resolvidos e explicados em cada um dos quatro livros citados e abrangendo a quase totalidade dos assuntos de matemática ministrados no curso básico.

Assim, a clientela que este livro poderá atender são os alunos dos cursos Fundamental e Médio, os vestibulandos, os candidatos à concursos públicos, os estudantes das primeiras séries de cursos superiores (com a finalidade de recordar rapidamente conceitos e problemas já estudados anteriormente) e todos aqueles que, afastados há muito tempo da matemática, queiram reiniciar-se nesse campo de estudos.

Os exercícios e situações-problema apresentados estão todos resolvidos e explicados, de tal forma que o leitor ao refazê-los e encontrando a resposta correta terá um reforço positivo, que o incentivará à busca de algum erro cometido, o que lhe permitirá uma atitude reflexiva, dando-lhe a oportunidade do desenvolvimento do processo de construção do seu conhecimento.

Dedicação, persistência, compreensão das ideias básicas da matemática assim como a aplicação delas na resolução de problemas do mundo real levarão o aluno à independência pessoal na conquista do conhecimento, gerando a segurança necessária à superação de obstáculos e das etapas da vida.

A quase totalidade dos problemas é resolvida com os recursos exclusivos da Aritmética, no caso do presente livro. Em poucos desses problemas, recorremos à aplicação da Álgebra elementar de forma a conduzir o leitor a uma iniciação branda e aprazível nesta área da matemática.

Grande parte dos textos dos exercícios foi criada pelos autores, outros, adaptados, e ainda muitos deles, obtidos de livros de matemática e de listas de problemas aplicados nos exames vestibulares de inúmeras universidades do país e de concursos públicos, sendo, porém, sempre da lavra dos autores a sua resolução, usando a metodologia por estes adotada; resolução passo-a-passo, esmiuçadamente, às vezes cansativo para quem está habituado à matemática, mas inteligível e agradável para o leigo, que se sentirá feliz em conseguir aprender a resolver problemas de matemática, nos níveis apontados. Quando, porém, algum problema tenha sido resolvido por outrem, que não os autores, aquele será sempre citado nominalmente.

Tivemos o objetivo, ao elaborar este livro, de fazer da matemática a mais fácil das disciplinas, porém, longe está dos autores a pretensão de inovar em seu conteúdo.

Entendemos que a forma da apresentação da matéria de maneira clara e pormenorizada, informando a parte teórica, sumariamente, na medida em que tais problemas são resolvidos e em alguns casos, preliminarmente à sua solução, permite ao leitor estudar os exercícios e problemas prazerosamente, desenvolvendo a interpretação de textos e o raciocínio lógico, atributos básicos para um bom aprendizado.

Quando dissemos que a teoria em cada caso foi tratada sumariamente, apenas como recordação, queremos dizer também que essa teoria por inteiro deve ser consultada pelo leitor nos livros didáticos de outros autores, conhecidos e adotados nas escolas de níveis Fundamental e Médio de nosso país; e que não deixem de consultar também os paradidáticos publicados e difundidos no ambiente escolar e fora deste.

Em virtude de ser este livro uma coletânea de exercícios e problemas resolvidos e explicados passo-a-passo, o leitor não necessita iniciá-lo pela primeira página, podendo dirigir-se diretamente ao assunto que lhe interessa, desde que, neste caso, obviamente, tenha já algum pequeno conhecimento de Aritmética elementar. Do contrário, deverá iniciá-lo pela 1ª página.

Conforme apontam o PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais – e o PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, procuramos desenvolver a habilidade de articular nomenclaturas, transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc.) e vice-versa; formular hipóteses, identificar dados e informações em situações-problema, desenvolvendo estratégias de solução, prever resultados, utilizar adequadamente as calculadoras e designações de grandezas e unidades de medidas incorporadas á linguagem cotidiana, constituindo um ferramental necessário à formação de um pensamento social e senso crítico necessários à realização de atividades e solução de problemas impostos pela vida moderna.

Evitamos, tanto quanto possível, expressões e símbolos incompreensíveis, no intuito de colocar o aluno, o leitor em geral, no centro do aprendizado ativo e interativo, posicionando os interessados na leitura desta modesta obra, não como pacientes do aprendizado, mas como agentes deste processo.

E assim, de acordo com essa orientação e tendo como objetivo precípuo levar o aluno a aprender a aprender sozinho, só recorrendo ao professor em raras ocasiões, é que elaboramos este livro de problemas resolvidos e comentados, passo-a-passo, minuciosamente, de modo que a leitura e o aprendizado da matemática fundamental possam ser acompanhados pelos que por esta matéria estejam interessados, de forma agradável e prazerosa.

Procuramos elaborar um livro, que, por modesto que seja, não sirva apenas para a escola, mas especialmente para a vida.

Se conseguirmos pelo menos entusiasmar o leitor a ler este livro em partes ou na totalidade, consideraremo-nos felizes e realizados.

Desejamos registrar nossos agradecimentos, antecipadamente, a todos os leitores que nos enviarem críticas construtivas e (ou) sugestões para que possamos aprimorar o texto de eventuais futuras edições.

Os autores

OS AUTORES

Prof. Darcy Chaves Silveira é engenheiro civil pela Universidade Mackenzie, fundador do Colégio Anchieta de São Bernardo do Campo, em 1965, do qual foi diretor geral e coordenador do ensino de matemática dos cursos fundamental e médio, até 2011.

Prof.ª Maria Sueli Gomes Saldanha é licenciada em Matemática pela Universidade São Paulo, Pós-Graduada em Matemática Educacional pela Universidade São Judas Tadeu e mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). É professora de matemática dos cursos fundamental, médio e superior.

Prof.ª Laura De O. Ramalho Misiti é bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) com mestrado em Ensino da Matemática pela mesma instituição. É professora de matemática dos cursos fundamental, médio e superior.

SUMÁRIO

UNIDADE

1

TEORIA DOS CONJUNTOS

1. TEORIA DOS CONJUNTOS

1. CONCEITOS PRIMITIVOS

O conceito de conjunto é primitivo, ou seja, não é definido. As vogais do nosso alfabeto: a, e, i, o, u as notas musicais: dó, ré, mi, fá, sol,, lá, si, uma coleção de livros, uma coleção de figurinhas são exemplos de conjuntos.
Conjuntos, como usualmente são concebidos, tem elementos. Um elemento de um conjunto pode ser uma vogal, uma nota musical, um livro ou uma figurinha. É importante frisar que um conjunto pode ser elemento de algum outro conjunto.
Em geral indicaremos os conjuntos por letras maiúsculas A, B, C,... e os elementos por letras minúsculas a, b, c,...

2. REPRESENTAÇÃO DE CONJUNTOS

Para representar um conjunto, usamos duas chaves, escrevendo entre elas uma propriedade característica de seus elementos ou escrevendo cada um de seus elementos.

Exemplos:
- A = {vogais do alfabeto} ou A = {a, e, i, o, u}
- B = {notas musicais} ou B {dó, ré, mi, fá, lá, si}

Obs.:
- Num conjunto não se deve repetir elementos iguais.
- Num conjunto, é permitido substituir elementos por reticências, desde que isto não prejudique a compreensão.

Exemplos:
- Conjunto dos números pares: {0, 2, 4, 6,...} ⟶ conjunto infinito

1. Represente os seguintes conjuntos, escrevendo seus elementos entre chaves:

a) A = conjunto dos números pares entre 9 e 15
b) B = conjunto dos números ímpares entre 120 e 130
c) C = conjunto dos meses do ano que começam pela letra m
d) D = conjunto dos números ímpares

Resolução:
a) A = {10, 12, 14}
b) B = {121, 123, 125, 127, 129}
c) C = {março, maio}
d) D = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... } ⟶ conjunto infinito

2. Represente, por uma propriedade de seus elementos, os conjuntos:

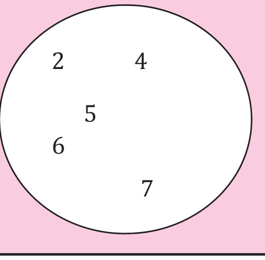
a) A = {primavera, verão, outono, inverno}
b) B = {2, 4, 6, 8, 10, 12}
c) C = {verde, amarelo, azul, branco}
d) D = {a, b, c, d, e, f}

Resolução:
a) A = {conjunto das estações do ano}
b) B = {conjunto dos números pares entre 0 e 14}
c) C = {conjunto das cores da bandeira brasileira}
d) D = {conjunto das seis primeiras letras do nosso alfabeto}

3. REPRESENTAÇÃO DE UM CONJUNTO PELO DIAGRAMA DE VENN-EULER

O diagrama de Venn-Euler consiste em representar o conjunto através de um círculo de tal forma que seus elementos e somente eles estejam no círculo.

Exemplo:
Se A = {2, 4, 5, 6, 7}, então:

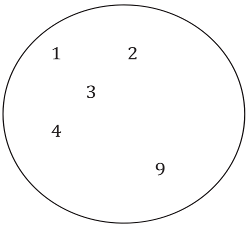


3. Represente por diagrama de Venn-Euler os conjuntos abaixo:

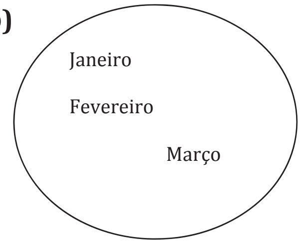
a) A = conjunto dos algarismos do número 12 349
b) B = conjunto dos meses do 1º trimestre do ano.

Resolução:

a)



b)



4. CONJUNTO UNITÁRIO E CONJUNTO VAZIO

Conjunto Unitário: é aquele que só tem um elemento.

Exemplo:

• A = {meses do ano que começam com f} $\rightarrow$ A = {fevereiro}

Conjunto Vazio: é aquele que não possui nenhum elemento.
É representado por $\varnothing$ ou { }.

Exemplo:

• B = {dias da semana que começam pela letra a} $\longrightarrow$ B = { }

5. RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Para indicar que um elemento pertence a um conjunto, usamos o símbolo $\in$ (lê-se pertence).
Exemplo:
Seja o conjunto A = {2,4, 6, 8}, queremos indicar que 6 pertence ao conjunto A, logo escrevemos:
$6 \in A$ (lê-se 6 pertence ao conjunto A)

Para indicar que um elemento não pertence a um conjunto, usamos o símbolo $\notin$ (lê-se: não pertence).
Exemplo:
$11 \notin A$ (lê-se 11 não pertence ao conjunto A)

6. RELAÇÃO DE INCLUSÃO – SUBCONJUNTOS

Sejam A e B dois conjuntos. Se todo elemento de A é também elemento de B, dizemos que A é subconjunto ou parte de B e indicamos por $A \subset B$.
... (lê-se: o conjunto A está contido no conjunto B)
Por outro lado, $A \not\subset B$ significa que A não é subconjunto de B (parte)
$A \not\subset B$ (lê-se: o conjunto A não está contido no conjunto B)

Exemplos:

1)

$\{2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ou $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \supset \{2, 3, 4\}$

A **contido** B ou B **contém** A

O conjunto A está contido no conjunto B ou O conjunto B contém o conjunto A

2)

$\{5, 6, 8\} \not\subset \{5, 6, 7, 9, 10\}$ ou $\{5, 6, 7, 9, 10\} \not\supset \{5, 6, 8\}$

A **não está contido** B ou B **não contém** A

O conjunto A não está contido no conjunto B ou O conjunto B não contém o conjunto A

4. Dizer se é verdadeira (V) ou falsa (F) as sentenças abaixo:

a) $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$

b) $\{3\} \in \{1, 2, 3, 4\}$

c) $\emptyset \in \{4, 5, 6\}$

d) $3 \in \{3, \{3\}\}$

e) $\{3\} \in \{3, \{3\}\}$

f) $\{1, 2\} \subset \{0, 1, 2, 3, 5]$

g) $3 \subset \{3, \{3\}\}$

h) $\emptyset \subset \{1, 2, 3\}$

i) $\emptyset \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

j) $\emptyset \in \{\emptyset, 1, 2\}$

Resolução:

a) (V) → Justificativa: 3 é elemento do conjunto

b) (F) → Justificativa: não é elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{3\}$ é sub conjunto do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$

c) (F) → Justificativa: $\emptyset$ não é elemento do conjunto $\{4, 5, 6\}$

d) (V) → Justificativa: 3 é elemento do conjunto $\{3, \{3\}\}$

e) (V) → Justificativa: $\{3\}$ é elemento do conjunto $\{3, \{3\}\}$

f) (V) → Justificativa: $\{1, 2\}$ é um subconjunto do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 5\}$

g) (F) → Justificativa: pois, $\{3\}$ é um elemento do conjunto $\{3, \{3\}\}$

h) (V) → Justificativa: pois, todo conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, inclusive dele próprio

i) (F) → Justificativa: pois, o conjunto vazio é um subconjunto e não um elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

j) (V) → Justificativa: pois, o conjunto vazio é um elemento do conjunto $\{\emptyset, 1, 2\}$

7. CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

NÚMEROS REAIS

Nos capítulos anteriores apresentamos os números naturais, os números inteiros, e os números fracionários, que podem ser expressos como uma razão de dois números inteiros, daí chamados de números racionais.

E que número é chamado de número real?

Todo número real ou é racional ou é irracional.

Se um número racional é qualquer número que pode ser representado pelo quociente de dois números inteiros, sendo o segundo diferente de zero, então, nessa divisão de números inteiros só podem ocorrer duas possibilidades, a divisão é exata ou não é exata.

Quando a divisão é exata, o quociente representa números inteiros, o denominador é divisor do numerador, por exemplo:

$$5 = \frac{10}{2}; \quad -3 = -\frac{15}{5}; \quad 9 = \frac{81}{9}; \quad 0 = \frac{0}{6}$$

Quando a divisão não é exata ou são decimais exatos, numerais com finitas casas decimais, por exemplo:

$$0{,}25 = \frac{25}{100}; \quad -3{,}2 = -\frac{32}{10} = \frac{-16}{5}$$

Ou, são decimais infinitos periódicos, numerais com infinitas casas decimais que se repetem, por exemplo:

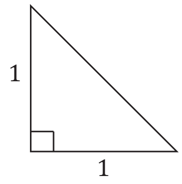
$$1{,}222\ldots = \frac{11}{9}; \quad 0{,}4343\ldots = \frac{43}{99}; \quad 2{,}1333\ldots = \frac{192}{90}.$$

Então, um número que não pode ser representado pelo quociente de dois números inteiros,é chamado **número irracional**, cuja representação é decimal infinita e não periódica.

Vejamos alguns exemplos: 0,05532467...; 2,34334434...; p = 3,14159265358...; 1,41421356...

O número irracional 1,41421356...pode ser representado pelo radical $\sqrt{2}$.

Por volta de 530 a.C. Pitágoras, filósofo, matemático e mestre dos pitagóricos, demonstrou que para qualquer triângulo retângulo,(triângulo com ângulo reto) o quadrado da hipotenusa(lado oposto ao ângulo reto) é igual à soma dos quadrados dos dois catetos, traçando figuras na areia ou com auxílio de cordas. Nesse processo de demonstração, construindo um triângulo cujos catetos mediam uma unidade, concluiu que não era possível descobrir um segmento unitário que coubesse um número inteiro de vezes em cada cateto e na hipotenusa. O número irracional $\sqrt{2}$ surgiu dessa situação, apesar dos gregos não conhecerem o radical $\sqrt{\ }$, diziam o número que multiplicado por si mesmo é 2.



Os catetos medem 1 e a hipotenusa mede *a*.

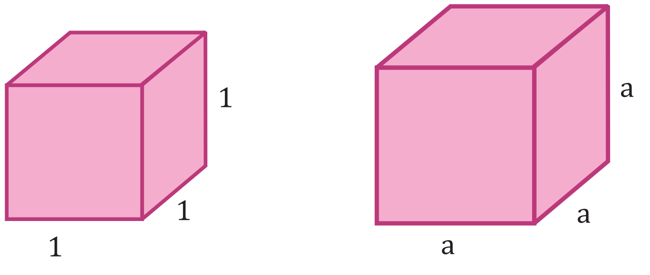
$$a^2 = 1^2 + 1^2$$

$$a^2 = 2$$

$$a = \sqrt{2}$$

A partir da descoberta do $\sqrt{2}$, foram descobertos muitos outros irracionais. Entre eles, no século V a.C., os atenienses para combaterem uma epidemia de peste, conforme instruções do oráculo de Apolo,deveriam duplicar o altar que tinha a forma de um cubo, mas duplicaram os lados fazendo com que o volume fosse multiplicado por 8.

Para duplicar o volume de um cubo de arestas 1 cm, por exemplo, descobrimos pela resolução de uma equação que a medida do lado do cubo duplicado é $\sqrt[3]{2}$, observe:



O volume do cubo de 1 cm de aresta é dado por $V_1 = 1 . 1 . 1 = 1^3$

Para determinar o lado do cubo cujo volume deve ser duplicado, temos que $V_2 = 2V_1$

Sendo $V_2 = a . a . a = a^3$ e $V_2 = 2V_1$, então:

$a^3 = 2.(1^3) = 2$, daí $a^3 = 2$ e o único valor que elevado ao cubo resulta 2 é o número irracional $\sqrt[3]{2}$.

Mais alguns radicais que representam irracionais:

$\sqrt{5} = 2{,}2360679...$; $\sqrt{6} = 2{,}4494897...$; $\sqrt[3]{4} = 1{,}58740...$; $\sqrt[4]{7} = 1{,}62657...$; $\sqrt[5]{10} = 1{,}58487...$

(lembramos que, por exemplo, na expressão $\sqrt[3]{4}$, 3 é o índice do radical e 4 é o radicando).

Nem toda raiz ou radical representa um número irracional, como por exemplo:

$\sqrt{9} = 3$; $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[4]{81} = 3$; $-\sqrt[5]{32} = -2$; $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$; $\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}$; são números racionais.

Portanto, o conjunto formado pelos números que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros, b ≠ 0 é chamado **conjunto dos números irracionais** que representamos pelo símbolo $\mathbb{I}$.

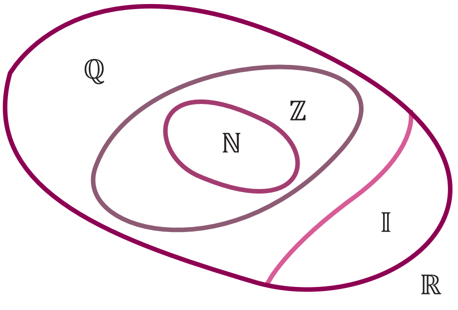
Observe que todos os números grafados nessa pagina, e ainda todos os que apareceram nos capítulos anteriores, são chamados de **número reais**.

O **conjunto dos números reais** é formado pela união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais e é representado pelo símbolo $\mathbb{R}$.

Portanto, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

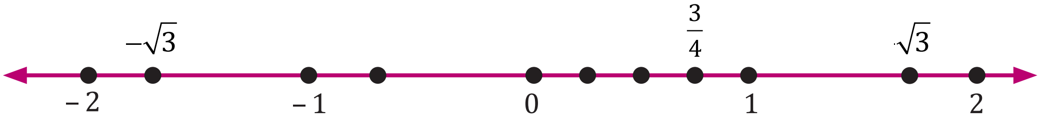
Como todo número real ou é racional ou é irracional, então não há elemento comum ao conjunto dos racionais e ao conjunto dos irracionais, ou seja, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varphi$

Podemos representar todos os conjuntos numéricos estudados no seguinte diagrama:



Os números reais são representados graficamente na reta numerada, considerando que a cada ponto da reta corresponde apenas um número real e vice-versa, tornando a reta totalmente contínua.

Representamos, na reta numerada seguinte, apenas alguns números reais:



Vamos resolver alguns exercícios de aplicação:

1. (UFPR)Uma das instruções de um exame vestibular afirmava que cada teste que compunha a prova apresentava cinco alternativas, das quais apenas uma correta. Passados alguns dias da prova, foi divulgado que um dos testes havia sido anulado. O teste anulado apresentava as seguintes alternativas:

a) x é um número natural
b) x é um número inteiro
c) x é um número racional
d) x é um número irracional
e) x é um número real

Explique por que o teste foi anulado.

Solução:

No início deste capítulo lembramos a definição de número racional, e apresentamos as definições de número irracional e real. Todo número natural é um número inteiro, é um número racional e também um número real. Logo se a resposta fosse um número natural, poderiam ser assinaladas as alternativas "a", "b", "c" ou "e". Ainda, se fosse um número inteiro, poderiam ser assinaladas as alternativas "b", "c" ou "e".

Para a resposta em que o número fosse racional, poderiam ser assinaladas as alternativas "c" ou "e". E,finalmente,se fosse um número irracional, seriam corretas as alternativas "d" e "e".

2. (UF-Viçosa) Assinale a alternativa INCORRETA. Dados os conjuntos:

A = { x/x é um número real}

B = { x/x é um número racional}

C = { x/x é um número primo}

Então:

a) $C \subset B$

b) $5 \in (B \cap C)$

c) $B \subset A$

d) $6 \in (A \cap B \cap C)$

e) $7 \in (A \cap C)$

Solução:

Vamos analisar uma a uma as alternativas.

A alternativa "a" é correta pois todos os números primos são números racionais.

A alternativa "b" é correta pois 5 é um número primo e racional(inteiro), portanto pertence à intersecção dos dois conjuntos.

A alternativa "c" é correta pois todo número racional é real.

A alternativa "d" é INCORRETA pois 6 não é primo, não é elemento do conjunto C e portanto não pode estar na intersecção dos conjuntos A,B e C.

A alternativa "e" é correta pois 7 é primo e um número real (inteiro), portanto pertence à intersecção.

Portanto, alternativa "d".

POTÊNCIA COM EXPOENTE FRACIONÁRIO

Considerando que um número real é um número racional ou um número irracional, podemos definir potência com expoente fracionário:

$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt[2]{4} = 2$ (real racional);

$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$ (real irracional);

$$\left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \text{ (real racional);}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt[5]{\frac{9}{25}} \text{ (real irracional)}$$

Toda potência de um número real de expoente fracionário pode ser representada por um radical, sendo o numerador a potência do radicando e o denominador, o índice do radical, ou seja, $a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$, sendo a ≥ 0, p inteiro e n natural não nulo.

Vamos, agora, apresentar um estudo dos radicais.

RADICAIS

RADICAL DE ÍNDICE PAR

Observamos que $\sqrt{4}$ = 2, pois $(2)^2 = 4$

$\sqrt{4} = -2$, pois $(-2)^2 = 4$

Como o resultado de uma operação matemática deve ser único, convenciona-se que $\sqrt{4}$ = 2 e que $-\sqrt{4} = -2$, que representam números reais racionais.

Os radicais $\sqrt[4]{16} = 2$ (pois $2^4 = 16$) e $\sqrt[6]{64} = 2$ (pois $2^6 = 64$), também são reais racionais.

Por outro lado, $\sqrt{-4}$ *não é um número real* pois, não existe um número real tal que elevado a um expoente par (no caso expoente 2) resulte em um número negativo, o – 4. O mesmo acontece para qualquer radical com radicando negativo cujo índice seja par, por exemplo, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{-64}$ *que não representam números reais.*

Os radicais $\sqrt{2}, \sqrt[4]{30}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt[6]{4},$ são irracionais que representam números reais.

RADICAL DE ÍNDICE ÍMPAR

Observamos que $\sqrt[3]{8} =$ 2 pois $2^3 = 8$, e

$\sqrt[3]{-8} = -2$ pois $(-2)^3 = -8$

O radical $\sqrt[5]{-243} = -3$, pois $(-3)^5 = -243$

Os radicais $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{-8}$ e $\sqrt[5]{-243}$ que expressam as raízes 2, – 2 e – 3, são números reais racionais.

Os radicais $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{-15}, \sqrt[5]{24}$ são números reais irracionais.

11. REGRA DE TRÊS

REGRA DE TRÊS SIMPLES – R/3

A Regra de Três é um procedimento prático que se emprega para achar uma grandeza desconhecida, dadas outras grandezas conhecidas.

1. Cinco sacos de fertilizan te agrícola custam R$ 400,00. Quanto se deve pagar por 18 sacos desse fertilizante?

Solução:
O enunciado do problema menciona "sacos" e "reais". Então, devemos colocar essas 2 grandezas, como indicado a seguir e sob essas grandezas colocar os valores correspondentes, indicados no problema.

$$\begin{array}{cccc} \textbf{Sacos} & & \textbf{R\$} & \\ 5 & \big\downarrow & 400 & \big\downarrow \\ 18 & & x & \end{array}$$

Observar que o valor "x" é a incógnita do problema, ou seja, é o valor que queremos descobrir.
Agora, precisamos verificar se a regra de três é direta ou inversa.
Uma regra de três é direta quando, no caso, o aumento do número de sacos corresponde a um aumento do valor em dinheiro. Portanto é direta. Na apresentação supra, temos 2 colunas; a dos sacos e a coluna do dinheiro.
Monta-se, agora, uma proporção, começando-se com a coluna que contém a incógnita e seguindo o sentido das setas:

$$\frac{400}{x} = \frac{5}{18} \rightarrow 5x = 400.18 \rightarrow x = \frac{400.18}{5} = 1\,440{,}00$$

Resposta: deve-se pagar R$ 1 440,00 pelos 18 sacos de fertilizantes.

➤ **Importante: por que as setas estão colocadas no mesmo sentido, de cima para baixo? Porque verificou-se que havendo <u>aumento</u> na quantidade de sacos, haverá também <u>aumento</u> na coluna do pagamento. Por isso é que é uma regra de três direta.**

2. Se 5 kg de arroz, no supermercado, custam R$ 12,00 quanto custarão 28 kg de arroz?

a) Disposição dos dados:

Kg	**R$**
5	12
28	x

b) Verifique, em primeiro lugar, se a regra de três é direta ou inversa.

➤ **Observe que, aumentando-se o peso do arroz, aumenta-se também o valor a pagar.**

Portanto, a Regra de Três supra é direta e as setas são colocadas, ambas, no mesmo sentido.

$$\begin{array}{cccc} \textbf{Kg} & & \textbf{R\$} & \\ 5 & \Big\downarrow & 12 & \Big\downarrow \\ 28 & & x & \end{array}$$

c) Então, seguindo a orientação das setas, montar a proporção:

$$\frac{12}{x}=\frac{5}{28}\rightarrow 5x=12.28\rightarrow x=\frac{12.28}{5}\rightarrow x=R\$67,20$$

Resposta: 28 kg de arroz custarão R$ 67,20.

3. Quinze (15) operários fazem um certo serviço em nove (9) dias. Quantos operários serão necessários para fazer esse mesmo serviços em cinco (5) dias?

Solução:

a) Disposição das grandezas.

Operários	**Dias**
15	9
x	5

b) Verificar se a Regra de Três supra é direta ou inversa.

➤ **Observe que, se queremos que o mesmo serviço esteja pronto em um número menor de dias (5), teremos que aumentar o número de operários. Então diminui-se o número de dias e aumenta-se o número de operários. Portanto, a regra de três supra, é inversa.**

Assim, as posições das setas têm sentidos opostos, como abaixo:

$$\begin{array}{cccc} \textbf{Operários} & & \textbf{Dias} & \\ 15 & \Big\downarrow & 9 & \Big\uparrow \\ x & & 5 & \end{array}$$

c) Montagem das proporções, seguindo o sentido das setas:

$$\frac{15}{x}=\frac{5}{9}\rightarrow 5x=9.15\rightarrow x=\frac{9.15}{5}\rightarrow x=27\text{ operários}$$

Resposta: Serão necessários 27 operários.

4. Se uma vela de 36 cm de altura diminui 1,8 mm por minuto, quanto tempo levará para se consumir?

Solução:
Fácil observar que a regra de três é direta, pois se o **consumo da vela aumenta**, o **tempo** necessário para consumi-la **também aumenta**. REGRA DE TRÊS DIRETA.

➤ **A grandezas envolvidas no problema devem estar sempre na mesma unidade.**

36 cm = 360 mm

$$\begin{array}{c|cc|c} \downarrow & 1{,}8\text{ mm} & 1\text{ minuto} & \downarrow \\ & 360\text{ mm} & x & \end{array}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1{,}8}{360}\rightarrow x=\frac{360}{1{,}8}=200\text{ min}=3\text{h }20\text{min}$$

Resposta: A vela levará 3h 20min para se consumir.

5. Duas rodas dentadas, que estão engrenadas uma na outra, têm respectivamente, 108 e 24 dentes. Quantas voltas dará a menor enquanto a maior dá 10 voltas?

Solução: Sabendo-se, pelo texto, que:
roda maior = 108 dentes
roda menor = 24 dentes

a) Disposição das grandezas:

	dentes	**voltas**
(maior)	108	10
(menor)	24	x

b) Verificar se a regra de três é direta ou inversa.

➤ **Observe que enquanto na "coluna dos dentes" a grandeza diminui, na "coluna das voltas" a grandeza aumentará. Então, a regra de três supra é inversa e as posições das setas tem sentidos opostos, como abaixo:**

$$\begin{array}{cc|cc} \textbf{dentes} & \downarrow & \textbf{voltas} & \uparrow \\ 108 & & 10 & \\ 24 & & x & \end{array}$$